"مقدمه"

۱. **مُد :** تغییری را که دارای بیشترین فراوانی (مطلق) باشد مُد گویند و برای پیدا کردن مُد ابتدا فراوانی داده ها را مشخص میکنیم و داده ای را که بیشترین فراوانی (مطلق) را داشته باشد بعنوان مُد انتخاب میکنیم.

- اگر تمام داده ها بطور یکسان تکرار شود مُد وجود ندارد
- در یک جامعه آماری ممکن است بیش از یک مُد وجود داشته باشد.

Xi	داده
Fi	فراوانی (مطلق)
M_0	مُد

مثال) برای داده های زیر مُد را محاسبه ، و برای جداول توضیع فراوانی زیر مُد را محاسبه کنید

- *1,2,3,1,2,4,5,5,4,4*

Xi	Fi
1	2
2	2
3	1
4	3
5	2

$M_0 = 4$

Xi	Fi
5	6
7	3
9	6
10	2
11	10

$M_0 = 5.9$

Xi	Fi
8	3
9	3
10	3
12	3

$M_0 =$ وجود ندارد

۲. **میانه**: به مرتب کردن داده ها بصورت صعودی (از کوچک به بزرگ) گفته میشود. به عددی گفته میشود که نیمی از داده ها از آن بزرگتر و نیمی از داده ها از آن کوچکتر باشد و برای پیدا کردن آن ابتدا داده ها را بصورت صعودی مرتب میکنیم و اگر کل داده ها (n) فرد باشد میانه برابر است با عددی که وسط قرار گیرد و اگر کل داده ها (n) زوج باشد میانه برابر است با میانگین دو عددی که وسط قرار میگیرند و با نماد Md نمایش داده میشود.

1) داده مرتب

2) تعداد کل داده ها و جمع فراوانی ها $= n$
- فرد ، عدد وسط
- زوج ، میانگین دو عدد مسط

مثال)

برای داده های زیر میانه را مشخص کنید.

1,2,3,1,2,4,5,5,4

۱/۱/۲/۲/۳/۴/۴/۵/۵

n=9

Md=3

Xi	Fi
1	2
2	2
3	1
4	2
5	2

n=9

برای جدول توضیع فراوانی زیر میانه و مُد را محاسبه کنید

Xi	Fi
10	2
12	2
17	5
19	4
20	5

$M_0 = 17.20$
$n = 18$

۱۰/۱۰/۱۲/۱۲/۱۷/۱۷/۱۷/۱۷/۱۷/۱۹/۱۹/۱۹/۱۹/۲۰/۲۰/۲۰/۲۰/۲۰

$$Md = \frac{17+19}{2} = \frac{36}{2} = 18 \qquad Md = 18$$

۳. میانگین:

داده ها	xi
تعداد کل داده ها	n
مجموع / جمع	$\sum_{i=1}^{n}$

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده ها}}{\text{تعداد کل داده ها}}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n}$$

مثال) برای جدول توضیع فراوانی زیر مُد، میانه، میانگین را بدست آورید.

$M_0 = 5$

xi	fi	xifi
5	6	30
7	3	21
8	4	32
6	5	30
	n=18	113

5،5،5،5،5،5،6،6،6،6،6،7،7،7،4،4،4،4

$$Md = \frac{6+6}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} xifi}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{4} xifi}{18} = \frac{30+21+32+30}{18} = \frac{113}{18} = 6.27$$

۴. واریانس:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} fi\,(xi-\bar{x})^2}{n-1}$$

$(xi-\bar{x})^2 =$ میانگین

xi	fi	xifi	$(\mathbf{xi}-\bar{\mathbf{x}})$	$(\mathbf{xi}-\bar{\mathbf{x}})^2$	$\mathbf{fi}(\mathbf{xi}-\bar{\mathbf{x}})^2$
10	2	20	10-17=-7	$(-7)^2 = 49$	2*49=98
12	2	24	12-17=-5	$(-5)^2 = 25$	2*25=50

17	5	85	17-17=0	$(0)^2 = 0$	5*0=0
19	4	76	19-17=2	$(2)^2 = 4$	4*4=16
20	6	120	20-17=3	$(3)^2 = 9$	6*9=56
	n=19	325			

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} xifi}{n} = \frac{325}{19} = 17/1 \cong 17$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(xi-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{98+50+0+16+56}{19-1} = \frac{218}{18} = 12/11$$

آزمایش تصادفی: آزمایشی که در شرایط یکسان قابل تکرار باشد و نتیجه آن قبل از انجام آزمایش مشخص نباشد ولی کلیه نتایج ممکن است قابل تعیین باشد را گویند.

فضای نمونه: مجموعه نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی را گویند. نماد آن S است.

پیشامد: به هر زیرمجموعه ای از فضای نمونه ای گفته میشود.

احتمال: احتمال رخ دادن پیشامدها به معنای شانس وقوع آن پیشامد در انجام یک آزمایش تصادفی میباشد

$0 \leq P(A) \leq 1$

مثال) تاسی را دوبار پرتاب میکنیم

الف) احتمال اینکه مجموع دو تاس ۵ باشد؟

$S = \{1.2.3.4.5.6\}$

پیشامد $= A = \{(1.4).(2.3).(3.2).(4.1)\}$

احتمال $= P(A) = \frac{n(A)}{S(A)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

ب) احتمال اینکه شماره تاس اول بر ۵ بخش پذیر باشد؟

$$\text{پیشامد} = B = \{(5.1).(5.2).(5.3).(5.4).(5.5).(5.6)\}$$

$$\text{احتمال} = P(B) = \frac{n(A)}{S(A)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- ✓ احتمال اینکه حداقل یکی از دو پیشامد $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ رخ دهد برابر است با:

$\cap$ = اشتراک　　$\cup$ = اجتماع

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- ✓ احتمال اینکه دو پیشامد $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ بطور همزمان رخ دهد برابر است با $P(A \cap B)$
- ✓ احتمال اینکه فقط پیشامد $\mathcal{A}$ رخ دهد برابر است با $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- ✓ احتمال اینکه فقط یکی از دو پیشامد $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ رخ دهد برابر است با Δ = تقارن متقارن

$$P(A\Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

مثال) احتمال اینکه شخصی در امتحان آمار قبول شود $\frac{1}{4}$ و احتمال اینکه در امتحان ریاضی قبول شود $\frac{1}{2}$ و احتمال اینکه در ۲ درس قبول شود $\frac{1}{8}$ مطلوب است ، محاسبه کنید:

احتمال قبولی در آمار $\mathcal{A}$　　$P(A) = \frac{1}{4}$

احتمال قبولی در ریاضی $\mathcal{B}$　　$P(B) = \frac{1}{2}$

احتمال قبولی در هردو درس $\mathcal{P}(\mathcal{A},\mathcal{B})$　　$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

الف) فقط در امتحان آمار قبول شود؟

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{2-1}{8} = \frac{1}{8}$$

ب) حداقل یکی از دو امتحان قبول شود؟

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{8}$$
$$=\frac{2+4-2}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

مثال) دو ظرف داریم که در ظرف اول چهار مهره سبز و سه مهره آبی و در ظرف دوم دو مهره آبی و پنج مهره سبز وجود دارد یکی از دو ظرف را بطور تصادفی انتخاب کرده و مهره ای از آن خارج میکنیم .

احتمال اینکه مهره خارج شده آبی باشد چقدر است؟

P(مهره آبی) = P(مهره آبی ظرف اول) یا P(مهره آبی ظرف دوم)

اول	
۳	ابی
۴	سبز

دوم	
۲	ابی
۵	سبز

احتمال ظرف اول $\frac{1}{2} * -\frac{3}{7}$

احتمال ظرف دوم $\frac{1}{2} * -\frac{2}{7}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{7}\right)=\frac{3}{14}+\frac{2}{14}=\frac{5}{14}$$

مثال) سه شرکت A و B و C به ترتیب ۳۰ و ۲۰ و ۵۰ درصد است که محصولات کارخانه ای را تولید میکند، معیوب محصولات این سه شرکت به ترتیب ۱ و ۲ و ۴ درصد میباشد. محصولی را تصادفی از این کارخانه انتخاب میکنیم که معیوب میباشد. احتمال اینکه توسط شرکت B تولید شده باشد چقدر است؟

C		B		A	
$\frac{50}{100}$	تولید	$\frac{20}{100}$	تولید	$\frac{30}{100}$	تولید
$\frac{4}{100}$	معیوب	$\frac{2}{100}$	معیوب	$\frac{1}{100}$	معیوب

$$\begin{cases} A\,\frac{30}{100}\begin{cases} i\,\frac{1}{100} \\ x\,\frac{99}{100}\end{cases} \\ B\,\frac{20}{100}\begin{cases} \frac{2}{100} \\ \frac{98}{100}\end{cases} \\ C\,\frac{50}{100}\begin{cases} \frac{4}{100} \\ \frac{96}{100}\end{cases}\end{cases}$$

$$P\left(B_{\text{شرکت دوم}} \middle| \text{خراب}\right) = \frac{P\,(B_{\text{خرابی از شرکت دوم}})}{P\,(\text{کل خراب بودن ها})}$$

$$= \frac{\frac{20}{100} * \frac{2}{100}}{\frac{30}{100} * \frac{1}{100} + \frac{20}{100} * \frac{2}{100} + \frac{50}{100} * \frac{4}{100}}$$

$$= \frac{\frac{40}{10000}}{\frac{30}{10000} + \frac{40}{10000} + \frac{200}{10000}} = \frac{\frac{40}{10000}}{\frac{270}{10000}} = \frac{40}{270} = \frac{4}{27}$$

فاکتوریل: تعداد حالت هایی را که میتوان n شئ مختلف را کنار یکدیگر قرار داد برابر با !n میباشد.

$n! = n(n-1)(n-2)\ldots * 1$

$5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1$

جاگشت: ترتیبی را که میتوان اشیاء یک مجموعه را در کنار یکدیگر قرار داد جاگشت گویند.

مثال) میخواهیم ۴ پزشک و ۵ مهندس را در یک ردیف کنار هم قرار دهیم.

الف) پیشامد آنکه پزشکان کنار هم باشند؟

۱<=۴ پزشکان

۵ <= ۵ مهندسان

!۶.!۴

$$\begin{cases} \text{پزشکان} = 4 => 4! \\ \text{پیشامد} = 1 + 5 = 6 => 6! \end{cases}$$

ب) پیشامد آنکه پزشکان کنار هم و مهندسان کنار هم باشند؟

۱ <= ۴ پزشکان

۱ <= ۵ مهندسان

!۲.!۴.!۵

ترتیب: اگر بخواهیم از بین n شئ متمایز r شئ را طوری انتخاب کنیم که ترتیب انتخاب آنها مهم باشد تعداد حالات آن برابر است با

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال) میخواهیم از بین یک گروه ۸ نفره ۳ نفر را طوری انتخاب کنیم که نفر اول رئیس ، نفر دوم منشی و نفر سوم حسابدار باشد. به چند حالت میتوان این سه نفر را انتخاب کرد؟

$n = 8$

$r = 3$

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8*7*6*5!}{5!} = 8*7*6 = 336$$

نکته : در فاکتوریل صورت در مخرج ساده نمیشود مگر آنکه باهم برابر باشند.

ترکیب: اگر بخواهیم از بین n شئ متمایز r شئ را طوری انتخاب کنیم که ترتیب انتخاب آنها مهم نباشد تعداد حالات ممکن آن برابر است با

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

مثال) میخواهیم از بین ۵ پزشک و ۳ پرستار یک گروه چهار نفره را تشکیل دهیم.

الف) پیشامد اینکه ۲ نفر پزشک و ۲ نفر پرستار؟

پزشک	5
پرستار	3

$$\left(\text{2 پزشک 2 پرستار}\right) = \binom{5}{2}\binom{3}{2} = (10)(3) = 30$$

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2(5-2)!}=\frac{5*4*3!}{2!\,3!}=\frac{5*4}{2!}=\frac{5*4}{2*1}=\frac{5*4}{2}=5*2=10$$

$$\binom{3}{2}=\frac{3!}{2(3-2)!}=\frac{3!}{2!\,3!}=\frac{3*2!}{2!\,1!}=\frac{3}{1}=3$$

ب) پیشامد اینکه حداقل ۳ نفر پزشک باشند؟

(حداقل ۳ پزشک)=(۳پزشک و ۱پرستار) یا (۴ پزشک)

$$\binom{5}{3}\binom{3}{1}+\binom{5}{4}=(10)(3)+(5)=35$$

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{3(5-3)!}=\frac{5!}{3!\,2!}=\frac{5*4*3!}{3!\,2!}=\frac{5*4}{2*1}=10$$

$$\binom{3}{1}=3$$

$$\binom{5}{4}=\frac{5!}{4(5-4)!}=\frac{5!}{4!\,1!}=\frac{5*4*3!}{4!\quad 1!}=\frac{5*4}{4*1}=\frac{5}{1}=5$$

مثال) ظرفی شامل ۴ مهره آبی و ۶ مهره قرمز میباشد. ۳ مهره را به تصادف و بدون جای گذاری از این ظرف انتخاب میکنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه :

الف) ۲ مهره آبی باشد؟

$$\begin{cases}\text{آبی}=4\\ \qquad\qquad => 3\\ \text{قرمز}=6\end{cases}$$

$$\text{پیشآمد} => \binom{4}{2}\binom{6}{1}=(6)(6)=36$$

$$\binom{4}{2}=\frac{n!}{r(n-r)!}=\frac{4!}{2!\,(4-2)!}=\frac{4*3*2!}{2!\,2!}=\frac{4*3}{2*1}=\frac{6}{1}=6$$

$$\binom{6}{1} = 6$$

$$احتمال => P(A) = \frac{P(A)}{P(S)} = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{36}{120}$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10*9*8*7!}{3!\,7!} = \frac{10*9*8}{3*2*1} = 120$$

ب) حداقل یک مهره قرمز باشد؟

(حداقل ۱ قرمز) = (۱ قرمز ۲ آبی) یا (۲ قرمز ۱ آبی) یا (۳ قرمز)

$$پیشامد => \binom{6}{1}\binom{4}{2} + \binom{6}{2}\binom{4}{1} + \binom{6}{3} = 36 + 60 + 30 = 156$$

$$\binom{6}{1} = 6$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4*3*2!}{2!\,2!} = \frac{4*3}{2*1} = \frac{6}{1} = 6$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6*5*4!}{2!\,4!} = \frac{6*5}{2*1} = \frac{30}{2} = 15$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6*5*4*3!}{3!\,3!} = \frac{6*5*4}{3*2*1} = 20$$

$$احتمال = P(B) = \frac{P(B)}{P(S)} = \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{2} + \binom{6}{2}\binom{4}{1} + \binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$$

نکته: اگر شئ داشته باشیم که n_1 تای آن از نوع اول و n_2 تای آن از نوع دوم و . . . و n_k تای آن از نوع k ام باشد $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ و آنگاه تعداد جایگشتهای آن برابر است با:

$$جایگشت = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \ldots * n_u!}$$

مثال) ۵ توپ قرمز و ۴ توپ سفید و ۳ توپ سبز را میخواهیم کنار هم قرار دهیم بطوری که توپهای هم رنگ قابل تشخیص نباشند، تعداد جایگشتهای ممکن آن را بنویسید.

n_1= ۵ توپ قرمز

n_2= ۴ توپ سفید

n_3= ۳ توپ سبز

$$n_1 + n_2 + n_3 = 5 + 4 + 3 = 12$$

$$\frac{n!}{n_1! * n_2! * n_3!} = \frac{12!}{5!\,4!\,3!}$$

متغیر تصادفی: تابعی است از فضای عمومی به مجموعه ۲- اعداد حقیقی بطوری که هر نقطه از فضای نمونه را به یک عدد حقیقی نسبت میدهد و متغیر تصادفی را با حروف بزرگ مانند X و Y و ... نشان میدهیم و مجموعه مقادیری را که میگیرد با حروف کوچک مانند x و y و ... نشان میدهیم.

متغیر تصادفی گسسته: متغیری را که مجموعه مقادیر آن متناوی یا نامتناوی قابل شمارش باشد را گویند. مانند پرتاب یک تاس یا دو سکه

مثال) سکه ای را سه بار پرتاب میکنیم، اگر متغیر تصادفی x نشان دهنده تعداد شیرها در این سه پرتاب باشد تابع احتمال x را بدست آورید.

$$\begin{cases} H\begin{cases} H\begin{cases} H \\ T \end{cases} \\ T\begin{cases} H \\ T \end{cases} \end{cases} \\ T\begin{cases} H\begin{cases} H \\ T \end{cases} \\ T\begin{cases} H \\ T \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$S: \{HHH.HHT.HTH.HTT.THH.THT.TTH.TTT\}$$

تعداد شیرها $=> X = 3.2.2.1.1.1.1.0 = 0.1.2.3$

$$P(x.0) = P(\{TTT\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(x.1) = P(\{HTT.THT.TTH\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(x.2) = P(\{HHT.HTH.THH\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(x.3) = P(\{HHH\}) = \frac{1}{8}$$

x	0	1	2	3
P(X=x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

تابع P(X=x)=f(x) : را تابع احتمالی برای متغیر تصادفی X گویند هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} P(X = x) = f(x) \geq 0 \\ \sum_{x} F\backslash f(x) = 1 \end{cases}$$

مثال) سکه ای را دوبار پرتاب میکنیم، اگر متغیر تصادفی x برابر با تعداد شیرها در این دو پرتاب باشد، تابع احتمال x را بدست آورید:

$$S = \{HH.HT.TT.TH\}$$

تعداد شیرها $=> X = 2.1.0.1 = 0.1.2$

x	0	1	2
P(X=x)	$\frac{1}{4}$ +	$\frac{2}{4}$ +	$\frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$
	f(0)	f(1)	f(2)

$$P(x = 0) = P(\{TT\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(x=1)=P(\{TH.HT\})=\frac{2}{4}$$

$$P(x=2)=P(\{HH\})=\frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} P(X=x)=f(x)\geq 0\surd \\ \sum_{x} f(x)=1\surd \end{cases}$$

امید ریاضی : اگر x یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال f(x) باشد، امید ریاضی x یا میانگین x بصورت زیر تعریف میشود.

$$E(x)=\sum_{x} x\,f(x)$$

مثال) اگر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال زیر باشد مقدار امید ریاضی x را بدست آورید

x	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$
	f(0)	f(1)	f(2)	f(3)

$$\begin{aligned} E(x)&=(0)f(0)+(1)f(1)+(2)f(2)+(3)f(3)\\ &=(0)\left(\frac{1}{8}\right)+(1)\left(\frac{2}{8}\right)+(2)\left(\frac{4}{8}\right)+(3)\left(\frac{1}{8}\right)=0+\frac{2}{8}+\frac{8}{8}+\frac{3}{8}\\ &=\frac{0+2+8+3}{8}=\frac{13}{8} \end{aligned}$$

ویژگیهای امید ریاضی : اگر B و A دو مقدار ثابت باشند، آنگاه:

۱. امید ریاضی یک مقدار ثابت برابر است با همان مقدار $E(b)=b$

۲. $E(ax)=aE(x)$

۳. $E(ax+b)=E(ax)+E(b)=aE(x)+b$

مثال) اگر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال زیر باشد مقادیر زیر را بدست آورید.

x	-1	0	1	2	جمع
f(x)	0.2	0.1	0.3	0.4	ضرب

$$E(x) = \sum_x \quad xf(x) = -0.2 + 0 + 0.3 + 0.8 = 0.9$$

$$E(4x) = 4E(x) = 4 * 0.9 = 3.6$$

$$E(7x - 6) = 7E(x) - 6 = 7(0.9) - 6 = 0.3$$

مثال) اگر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال زیر باشد مقادیر زیر را بدست آورید:

x	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

الف) E(10x+12)

$$E(x) = 0 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$E(10x + 12) = 10E(x) = 10(1) + 12 = 22$$

ب) $E(x^2)$

$$E(x^2) = (0)^2\left(\frac{1}{4}\right) + (1)^2\left(\frac{2}{4}\right) + (2)^2\left(\frac{1}{4}\right) = 0 + \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$E(x)^2 = \sum_x x^2 f(x)$$

ج) $E(6x^2 - 4x + 8)$

$$E(6x^2 - 4x + 8) = E(6x^2) - E(4x) + E(8) = 6E(x^2) - 4E(x) + 8$$
$$= 6(1.5) - 4(1) + 8 = 9 - 4 + 8 = 13$$

واریانس : اگر x یک متغیر تصادفی باشد واریانس آن بصورت زیر تعریف میشود.

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 \geq 0$$

ویژگیهای واریانس

۱. اگر دو مقدار a و b یک عدد ثابت باشد آنگاه واریانس یک مقدار ثابت برابر با صفر میشود. $V(b) = 0$

۲. $V(ax) = a^2V(x)$

مثال) برای تابع احتمال زیر مقادیر خواسته شده را بدست آورید.

الف) $E(4x^2 - 8)$؟

$$E(x) = 0 + \frac{2}{8} + \frac{6}{8} + \frac{6}{8} = \frac{14}{8} = 1.75$$
$$E(x)^2 = 0 + \frac{2}{8} + \frac{12}{8} + \frac{18}{8} = \frac{32}{8} = 4$$
$$4E(x) = 4(4) - 8 = 8$$

ب) $V(x)$؟

$$E(x^2) - [E(x)]^2 = (4) - [(1.75)]^2 = (4) - (3.06) = 0.94$$

ج) $V(6x)$؟

$$a^2V(x) = (6)^2V(x) = 36 * 0.96 = 33.84$$

توزیع برنولی : آزمایشی دا در نظر بگیرید که بالای دو نتیجه موفقیت با احتمال P و شکست با احتمال P-1 میباشد. چنین آزمایشی را برنولی گویند که تابع احتمال آن بصورت زیر تعریف میشود.

$$f(x) = P^x \qquad (1-P)^{1-x} \qquad x = 0\,.1$$

توزیع دو جمله ای : آزمایشی را دو جمله ای گویند که دارای ویژگی های زیر باشد

۱. آزمایش برنولی را n بار تکرار کنیم

۲. احتمال موفقیت و شکست در تمام n آزمایش ثابت باشد

اگر متغیر تصادفی x را برابر با تعداد موفقیت ها در n بار تکرار آزمایش برنولی در نظر بگیریم ، آنگاه متغیر تصادفی x دارای توزیع دو جمله ای میباشدکه احتمال آن بصورت زیر است.

$$f(x) = \binom{n\ \text{تعداد تکرار آزمایش}}{X} \ \text{احتمال موفقیت}\ P^{x} \quad (\text{احتمال شکست}\ 1-P)^{n-x\ \text{بار تکرار}\ n\ \text{تکرار موفقیت}}$$

مثال) فردی در یک آزمایش 6 سوالی که سوالات بصورت سه گزینه ای هستند شرکت میکند و بصورت تصادفی به سوالات پاسخ میدهد.

مطلوب است محاسبه احتمال اینکه به ۴ سوال پاسخ درست دهد.

P	$\frac{1}{3}$
1-P	$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$
n	**6**
x	**4**

$$f(x) = \binom{n}{x} P^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6*5*4!}{4!\ \ 2!} = \frac{6*5}{2*1} = 15$$

$$\binom{6}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{6-4}$$

$$(15)\left(\frac{1}{81}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{60}{729}$$

"فصل اول"

طبقه بندی

مثال)۱٫۳٫۴) وزن ۴۰ قالب کره که به نزدیک ترین عدد صحیح گرد شده اند به قرار زیر است ، یک جدول فراوانی برای این داده ها تشکیل دهید.

۳۳	۴۶	۳۸	۳۴	۵۱	۳۶	۴۷	۲۴	۳۵	۵۲
۴۰	۴۲	۴۰	۴۱	۳۴	۴۷	۵۰	۳۸	۳۶	۴۷
۲۱	۴۱	۳۷	۳۷	۳۵	۳۰	۳۲	۳۰	۲۹	۲۶
۴۳	۳۴	۳۱	۴۳	۲۳	۴۵	۳۵	۲۶	۳۰	۳۱

حل:

فراوانی تجمعی نسبی $s_i = \frac{g_i}{n}$	فراوانی تجمعی	فراوانی نسبی	فراوانی مطلق	شاخص			
s_i	g_i	r_i	f_i	X_i	خط و نشان	رده ها	حدود طبقات
۰٫۰۷۵	۳	۰٫۰۷۵	۳	۲۳	|||	۲۰٫۵-۲۵.۵	جمع، تقسیم بر دو

<table>
<tr><td>*فراوانی نسبی=فراوانی</td><td>۲۵٫۵-۳۰.۵</td><td>| |||||</td><td>۲۸</td><td>۶</td><td>۰٫۱۵</td><td>۹</td><td>۰٫۲۲۵</td></tr>
<tr><td>طبقات تقسیم بر تعداد کل</td><td>۳۰٫۵-۳۵.۵</td><td>|||||
|||||</td><td>۳۳</td><td>۱۰</td><td>۰٫۲۵</td><td>۱۹</td><td>۰٫۴۷۵</td></tr>
<tr><td>*فراوانی تجمعی و مطلق بعلاوه ردیف قبلی</td><td>۳۵٫۵-۴۰.۵</td><td>||| |||||</td><td>۳۸</td><td>۸</td><td>۰٫۲۰</td><td>۲۷</td><td>۰٫۶۷۵</td></tr>
<tr><td>*</td><td>۴۰٫۵-۴۵.۵</td><td>| |||||</td><td>۴۳</td><td>۶</td><td>۰٫۱۵</td><td>۳۳</td><td>۰٫۸۲۵</td></tr>
<tr><td></td><td>۴۵٫۵-۵۰.۵</td><td>|||||</td><td>۴۸</td><td>۵</td><td>۰٫۱۲۵</td><td>۳۸</td><td>۰٫۹۵</td></tr>
<tr><td></td><td>۵۰٫۵-۵۵.۵</td><td>||</td><td>۵۳</td><td>۲</td><td>۰٫۰۵</td><td>۴۰</td><td>۱٫۰۰</td></tr>
<tr><td></td><td>جمع</td><td></td><td></td><td>۴۰</td><td>۱٫۰۰</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5"></td><td>$r_i = \frac{f_i}{n}$</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

۱. میانگین:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

مثال) طبق مثال بالا =>

$f_i * i$
$3 * 23 = 69$
$6 * 28 = 168$
$10 * 33 = 330$
$8 * 38 = 304$
$6 * 43 = 258$

$5 * 48 = 240$
$2 * 53 = 106$
$\mathbf{1475 \rightarrow \frac{1745}{7} = 24.9}$

۲. میانه:

ابتدا اعداد را مرتب بنویسیم حتی با تکرار سپس عدد وسط میانه است.

$1.2.3.4 \rightarrow 2.5$

$1.2.4.4.4.5 \rightarrow 4$

مثال(۱٫۳٫۴)

$$M_e = L_{\%50} + \frac{(\%50n - g_{\%50}) * w}{f_{\%50}}$$

هرجا به ۵۰٪ رسیدیم آنجاست، در جدول S_i

$35.5 - 40.5 \rightarrow (35.5 = L)$ کران پایین
$W = 5$ فاصله
$f = f_i \rightarrow 8$ فراوانی رده میانه
$g \rightarrow 19$ فراوانی تجمعی یک وابسته بالاتر
$n =$ تعداد داداه ها

مثال(۱٫۳٫۵) داده های زیر یک نمونه ۵۰ تایی از اندازه نیروی پارگی نخ های کتان است:

۲۶٫۴	۲۳٫۰	۲۳٫۹	۳۰٫۲	۲۹٫۵	۳۲٫۷	۲۵٫۰	۲۷٫۱	۲۸٫۳	۲۱٫۲
۲۳٫۵	۲۹٫۲	۳۶٫۸	۲۹٫۰	۱۷٫۳	۲۹٫۳	۲۱٫۹	۲۹٫۴	۳۳٫۷	۲۷٫۳

۲۰٫۶	۲۹٫۵	۲۱٫۸	۳۷٫۵	۳۳٫۵	۲۹٫۶	۲۶٫۸	۲۸٫۷	۳۴٫۸	۱۸٫۶
۲۵٫۴	۳۴٫۱	۲۷٫۵	۲۹٫۶	۲۲٫۲	۲۲٫۷	۳۱٫۳	۳۳٫۲	۳۷٫۰	۲۸٫۳
۳۶٫۹	۲۴٫۶	۲۸٫۹	۲۴٫۸	۲۸٫۱	۲۵٫۴	۳۴٫۵	۲۳٫۶	۳۸٫۴	۲۴٫۰

با توجه به روشهای گفته شده در مثال ۱٫۳٫۴ محاسبات زیر را برای این مثال انجام میدهیم:

$$k = 1 + 3.322g_{10}^{50} = 6.644 \approx 7$$

$$S = \frac{0.1}{2} = 0.05$$

$$min = 17.3 - 0.05 = 17.25$$

$$max = 38.4 + 0.05 = 38.45$$

$$R = 38.45 - 17.25 = 21.2$$

$$w = \frac{21.2}{7} = 3.0286 \approx 3.1$$

رده ها	خط و نشان	X_i	f_i	r_i	g_i	S_i
۱۷٫۲۵-۲۰٫۳۵	II	۱۸٫۸	۲	۰٫۰۴	۲	۰٫۰۴
۲۰٫۳۵-۲۳٫۴۵	II IIIII	۲۱٫۹	۷	۰٫۱۴	۹	۰٫۱۸
۲۳٫۴۵-۲۶٫۵۵	IIIII IIIII	۲۵٫۰	۱۰	۰٫۲۰	۱۹	۰٫۳۸
۲۶٫۵۵-۲۹٫۶۵	IIIII IIIII IIIII II	۲۸٫۱	۱۷	۰٫۳۴	۳۶	۰٫۷۲
۲۹٫۶۵-۳۲٫۷۵	III	۳۱٫۲	۳	۰٫۰۶	۳۹	۰٫۷۸
۳۲٫۷۵-۳۵٫۸۵	I IIIII	۳۴٫۳	۶	۰٫۱۲	۴۵	۰٫۹۰

۱٫۰۰	۵۰	۰٫۱۰	۵	۳۷٫۴	IIIII	۳۵٫۸۵-۳۸٫۹۵
			۵۰			جمع

حال میانه داده ها را محاسبه کنید.

با توجه به جدول رده میانه ۶۵٫۲۹-۵۵٫۲۶ میباشد و عملیات مربوط به میانه عبارت است از:

$$L_{0.5(\%50)} = 65.55.n = 50.g_{0.5(\%50)} = 19.f_{0.5(\%50)} = 17.w = 3.1$$

$$m = 26.55 + \frac{(0.5 * 50 - 19) * 3.1}{17} = 26.55 + 1.094 = 27.644$$

نکته: چارک اطلاعات را به ۴ قسمت تقسیم میکند.

$$Q_3 = L_{\%75} + \frac{(\%75n - g_{\%75)*w}}{f_{\%75}}$$

نکته: دهک اطلاعات را به ۱۰ قسمت تقسیم میکند.

$$D_2 = L_{\%20} + \frac{(\%20n - g_{\%20}) * w}{f_{\%20}}$$

نکته: اگر دهک در طبقه اول قرار گیرد g برابر صفر است.

نکته: دهک پنجم و چارک دوم و میانه با هم برابر هستند.

۳. نما (مُد)

حد اکثر دو نماد است.

$$M_0 = L + \left(\frac{D_1}{D_1 + D_2}\right) * w$$

مثال) ۱٫۳٫۴)

$$30.5 + \left(\frac{4}{4+2}\right) * 5 = 155.8$$

نکته: فراوانی مطلق طبقه مدنظر، از طبقه بالا کسر شود D_1 حاصل میشود و از طبقه پایین کسر شود D_2 حاصل میشود.

۴. پراکندگی

$$S^2 = \frac{!}{n-1}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \bar{X})^2$$

قضیه: واریانس را میتوان از فرمول زیر محاسبه کرد:

$$S^2 = \frac{!}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i\right)^2\right]$$

مثال)۱٫۳٫۴)

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
۲۳	۳	۶۹	۱۵۸۷
۲۸	۶	۱۶۸	۴۷۰۴
۳۳	۱۰	۳۳۰	۱۰۸۹۰
۳۸	۸	۳۰۴	۱۱۵۵۲
۴۳	۶	۲۵۸	۱۱۰۹۴
۴۸	۵	۲۴۰	۱۱۵۲۰
۵۳	۲	۱۰۶	۵۶۱۸
جمع	۴۰	۱۴۷۵	۵۶۹۶۵

$$S^2 = \frac{1}{39}\left[56965 - \frac{(1475)^2}{40}\right] = 66.0096 \rightarrow S = \sqrt{66.0096} = 8.12$$

"فصل دوم"

فضای نمونه و پیشامد

← آزمایشی که تحت شرایط یکسان بتوان آن را تکرار کرد و نتیجه آن قبل از انجام آزمایش قابل تعیین نبوده ولی کلیه نتایج ممکن آن قابل تعیین باشد را یک آزمایش تصادفی گویند. مثل پرتاب سکه یا تاس

← مجموعه تمام نتایج یک آزمایش تصادفی را فضای نمومه گویند و آن را با نماد S نشان میدهند.

مثال) پرتاب یک سکه

$$S = \{H.T\} \rightarrow \{HH.HT.TH.TT\}$$

۱. **فضای نمونه گسسته:** شامل دو بخش است.

- ✓ فضای نمونه متناهی: که تعداد اعضای آن متناهی است.

مثال) پرتاب یک تاس

$S = \{1.2.3.4.5.6\}$

- ✓ فضای نمونه متناهی شمارش پذیر: یک مجموعه نامتناهی اما شمارش پذیر است.

مثال) فضای نمونه حاصل از پرتاب یک سکه تا مشاهده یک شیر

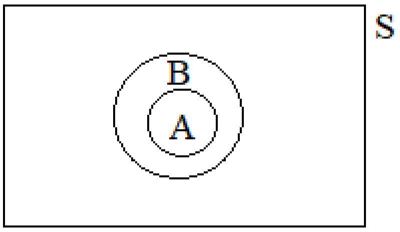
$S = \{H.TH.TTH.TTTH. \ldots\}$

۲. **فضای نمونه پیوسته:** که اعضای آن بصورت یک فاصله از اعداد حقیقی یا یک سطح در فضای دو بعدی یا ... است.

مثال) اگر طول عمر لامپ تولیدی یک کارخانه را که حداکثر ۱۰۰۰۰ ساعت طول عمر دارد اندازه گیری کنیم. آنگاه فضای نمونه فاصله $S = [0.10000]$ است.

پیشامدها

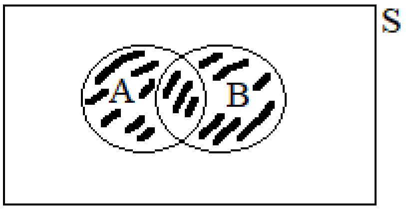
۱. **زیرپیشامد:** پیشامد A را زیر پیشامد، پیشامد B گوییم. هرگاه وقوع A، وقوع B را نتیجه دهد



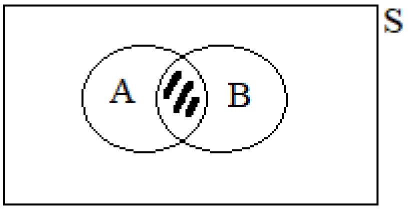
۲. **دو پیشامد مساوی:** دو پیشامد A و B را مساوی گوییم هرگاه مقوع یکی وقوع دیگری را نتیجه دهد.

$A = B \leftrightarrow (A \subset B . B \subset A)$

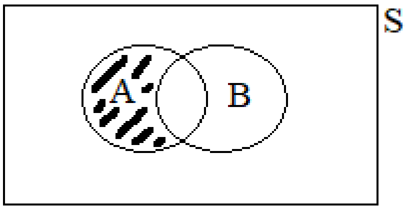
۳. **اجتماع دو پیشامد:** پیشامد $A \cup B = \{x|x \in A$ یا $x \in B\}$ را اجتماع دو پیشامد A و B گوییم و، وقوع $A \cup B$ به معنای وقوع حداقل یکی از دو پیشامد A یا B است.



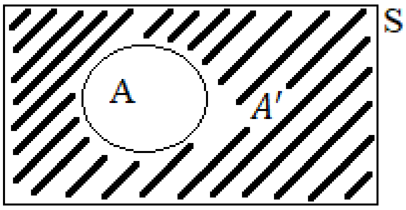
۴. **اشتراک دو پیشامد:** پیشامد $A \cap B = \{x|x \in A . x \in B\}$ را اشتراک دو پیشامد A و B گوییم و، وقوع $A \cap B$ به معنای وقوع همزمان هر دو پیشامد A و B است.



۵. **تفاضل دو پیشامد:** پیشامد $A - B = \{x|x \in A . x \notin B\}$ را تفاضل پیشامد B از A گوییم و، وقوع $A - B$ به معنای وقوع «فقط A و نه B» است.



۶. متمم یک پیشامد: پیشامد $A' = \{x|x \in S \quad x \notin A\}$ را متمم پیشامد A گوییم و،وقوع A' به معنای عدم وقوع پیشامد A است.



← دو پیشامد A و B را ناسازگار (جدا) گوییم. هرگاه $A \cap B = \emptyset$ یعنی دو پیشامد را ناسازگار گوییم هرگاه هر دو نتوانند هم زمان اتفاق بیفتند.

← پیشامدهای $A_1 . A_2 . A_3 \dots$ را دو به دو ناسازگار گوییم هرگاه به ازای هر $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$

احتمال

احتمال وقوع یک پیشامد به معنای شانس وقوع آن پیشامد در انجام یک آزمایش تصادفی است. برای محاسبه احتمال تعبیرهای مختلفی از جمله فراوانی نسبی ، هم شانسی و شخصی وجود دارد که هرکدام از آنها میتواند برای بکارگیری احتمال در مسائل علمی مفید باشند ولی به هرکدام انتقادهایی وارد است.

n تعداد تکرار آزمایش تصادفی	
$f_n(A)$ تعداد دفعاتی که در این n پیشامد A به وقوع پیوسته	$P(A) = \lim_{n \to +\infty} r_n(A)$
$r_n(A)$ عدد ثابت با افزایش n	

	$\mathcal{P}(\mathcal{A})$ عدد ثابت احتمال وقوع پیشامد $\mathcal{A}$

۱. **تابع احتمال:** احتمال تابعی از مجموعه متشکل از، زیر مجموعه های فضای نمونه به داخل مجموعه اعداد حقیقی است. به عبارت دقیق تر احتمال تابعی مانند $\mathcal{P}$ است که به هر پیشامد $\mathcal{A}$ از فضای نمونه S عدد حقیقی $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ را به گونه ای نسبت میدهد که در ۳ اصل موضوع زیر صدق نماید.

۱. $\mathcal{P}(S)=1$

۲. برای هر پیشامد $\mathcal{A}$ در S، $P(A) \geq 0$

۳. اگر $A_1 . A_2 . A_3 ....$ پیشامدهای دوبه دو ناسازگار باشند، آنگه

$$P(A_3 \cup A_2 \cup A_1 \cup \ldots) = P(A_1) + p(A_2) + P(A_3) + \cdots$$

که ادامه تابع احتمال را روی هریک از فضاهای نمونه گسسته و پیوسته بدست می آوریم.

۲. **مدل احتمال روی فضای نمونه متناهی:** فرض کنید $S = \{e_{1.} e_2 . .... e_n\}$ یک فضای نمونه متناهی غیر تهی باشد. یک مدل احتمال روی این فضای نمونه عبارت است از نسبت دادن وزن های احتمالات نامنفی $P_1 . P_2 . .... P_n$ به نقاط فضای نمونه S بطوری که مجموع تمام این اعداد، برابر یک شود. یعنی؛

S	e_1	e_2	...	e_n
احتمال	P_1	P_2	...	P_n

$$0 \leq P_i \leq 1 . i = 1.2. .... n . \sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

اگر $\mathcal{A}$ یک پیشامد، در فضای نمونه S باشد. احتمال پیشامد $\mathcal{A}$ برابر مجموع تمام احتمالات نسبت داده شده به پیشامدهای ساده تشکیل دهنده $\mathcal{A}$ در نظر گرفته میشود. یعنی:

$$A = \{e_1 . e_2 . .... e_m\} CS \rightarrow P(A) = p_1 + p_2 + \cdots + p_m = \sum_{i=1}^{m} P_i$$

مثال) یک سکه را دوبار پرتاب میکنیم احتمال آوردن حداقل یک شیر؟

$$S = \{TT.TH.HT.HH\}$$

$$W = \frac{1}{4} \to 4W = 1$$

s	TT	TH	HT	HH
احتمال	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$A = \{TH.HT.HH\}$$

$$p(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

۳. مدل احتمال یکنواخت:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد پیشامد}\left(\text{اعضای پیشامد}\right) A}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه } S} = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}}$$

مثال) جعبه ای شامل ۳ توپ سفید، ۴ توپ سیاه، ۵ توپ قرمز است. یک توپ به تصادف از این جعبه خارج میکنیم.

$$n(s) = 3 + 4 + 5 = 12$$

الف) احتمال اینکه توپ انتخابی قرمز باشد.

$$P(R) = \frac{n(R)}{n(S)} = \frac{5}{12}$$

ب) احتمال اینکه توپ انتخابی سفید باشد.

$$P(w) = \frac{n(w)}{n(s)} = \frac{3}{12}$$

جایگشت ها

ترتیبی را میتوان اشیاء یک مجموعه را در کنار یکدیگر قرار داد یک جایگشت گویند.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال) ۴ پزشک و ۵ مهندس میخواهند، در یک صف کنار یکدیگر قرار گیرند.

الف) احتمال اینکه مهندسها در یک طرف صف و پزشک ها در طرف دیگر صف قرار گیرند را بیابید.

$$n(A)=2!\,4!\,5!$$

$$n(S)=4!+5!=9!$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{2!\,4!\,5!}{9!}$$

ب) احتمال اینکه پزشکها و مهندس ها یک در میان در صف قرار گیرند.

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{4!\,5!}{9!}$$

ج) احتمال اینکه دو مهندس بخصوص همواره کنار یکدیگر قرار گیرند را بیابید.

$$P(c)=\frac{n(c)}{n(s)}=\frac{8!\,2!}{9!}$$

د) احتمال اینکه دو مهندس بخصوص هیچگاه کنار یکدیگر قرار نگیرند را بیابید.

$$P(c')=1-P(c)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

نکته: اگر بین n عنصر متمایز بخواهیم r عنصر، را انتخاب کرده و در یک صف قرار دهیم، آنگاه :

a) اگر تکرار عناصر مجاز نباشد، آنگاه تعداد راه های ممکن برابر است با:

$$P_r^n=\frac{n!}{(n-r)!}$$

b) اگر تکرار عناصر مجاز باشد آنگاه تعداد راه های ممکن برابر است با:

ترکیب بدون تکرار $C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

ترکیب

ترکیب با تکرار $\binom{n+r-1}{r}$

مثال) میخواهیم ۳ کتاب ریاضی عمومی یک ،۵ کتاب معادلات دیفرانسیل ، ۴ کتاب آمار مهندسی را در کنار یکدیگر در یک قفسه قرار دهیم. احتمال اینکه هر ۳ کتاب ریاضی عمومی یک کنار هم قرار گیرند را بیابید.

$$n!\begin{cases} n_1 & \text{ریاضی} \\ n_2 & \text{معادلات} \\ n_k & \text{آمار} \end{cases}$$

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\dots\,n_k!}$$

$$P(A) = \frac{n(A) = \frac{10!}{1!\,4!\,5!}}{n(S) = \frac{12!}{2!\,4!\,5!}}$$

مثال) از بین ۴ پزشک و ۳ پرستار میخواهیم یک کمیته ۴ نفری تشکیل دهیم.

الف) احتمال اینکه اعضای کمیته شامل ۲ پزشک و ۲ پرستار باشد؟

$$n(s) = \binom{7}{4}$$

$$P(A)=\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}}$$

$$n(A)=\binom{4}{2}\binom{3}{2}$$

ب) احتمال اینکه اعضای کمیته شامل حداقل دو پرستار باشد را بیابید؟

$$P(A)=\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{3}}{\binom{7}{4}}+\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{7}{4}}+\frac{\binom{3}{3}\binom{4}{1}}{\binom{7}{4}}=\frac{\binom{3}{0}\binom{4}{4}}{\binom{7}{4}}$$

مثال) سکه ای را آنقدر پرتاب میکنیم تا یک شیر مشاهده شود و سپس توقف میکنیم.

الف) احتمال اینکه تعداد فردی پرتاب لازم باشد را بیابید؟

S	H	TH	TTH	TTTH	TTTTH	TTTTTH
احتمال P_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\mathbf{\frac{1}{64}}$

$$\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\right]=1$$

$$\frac{\text{جمله اول}}{1-\text{قدر نسبت}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$$

$$P\left(\text{پرتابهای زوج}\right)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

$$P(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

ب) احتمال اینکه حداقل ۷ پرتاب لازم باشد؟

$$P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \cdots = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

فضای نمونه پیوسته

$$P(A) = \frac{\text{طول زیر فاصله } A}{\text{طول فاصله } S} \left(= \frac{\text{مساحت ناحیه } A}{\text{مساحت ناحیه } S} \text{ یا} \ldots \right)$$

مثال) ۲،۶،۳) از داخل دایره ای به شعاع R نقطه ای را به تصادف انتخاب میکنیم. احتمال اینکه فاصله نقطه انتخابی تا مرکز دایره کمتر از فاصله آن تا محیط دایره باشد را بیابید.

$$S = \{x | x\ e | R\ .\ 1 \le x \le 4\}$$

$$A = \{x | x\ e | R\ .\ 1 \le x \le 2\}$$

$$P(A) = \frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = \frac{\pi \frac{R^2}{4}}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$$

احتمال شرطی

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B) \neq 0$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad P(A) \neq 0$$

مثال) ۳/۷/۲) جدول زیر تعداد قطعات سالم و معیوب تولیدی توسط دو کارخانه ۱ و ۲ را نشان میدهد. اگر یک قطعه بطور تصادفی انتخاب شود و این قطعه سالم باشد، احتمال اینکه از کارخانه ۱ انتخاب شده باشد را بیابید.

	۱	۲	جمع
معیوب	۱۵	۵	۲۰
سالم	۴۵	۳۵	۸۰
			۱۰۰

$$P\left(\text{کالا سالم} \,\middle|\, \text{از کارخانه } 1\right) = \frac{P\left(\text{کالا سالم از کارخانه } 1\right)}{P\left(\text{کالا سالم}\right)} = \frac{\frac{45}{100}}{\frac{80}{100}} = \frac{45}{80}$$

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

$$P(A|B) \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) * P(B)}{P(B)} = P(A)$$

تمرینات

تمرین ۷) فرض کنید که یک تاس طوری ساخته شده باشد که در آن احتمال آمدن هر عدد متناسب با خود آن عدد باشد. مدل احتمال برای پرتاب یک بار این تاس را معین کنید و با استفاده از ان احتمال امدن یک عدد زوج و احتمال آمدن یک عدد بزرگتر از ۴ را حساب کنید.

تاس	1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

$$P(1) = 1x$$

$$P(6) = 6x$$

احتمال آمدن یک عدد زوج $\rightarrow \frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{12}{21}$

احتمال آمدن یک عدد بزرگتر از 4 $\rightarrow \frac{5}{21}+\frac{6}{21}=\frac{11}{21}$

تمرین ۱۳) اگر پلاک اتومبیل ها از ۵ شماره غیر صفر و یک حرف الفبای فارسی تشکیل شود، تعداد اتومبیل هایی را که میتوان شماره کرد تعیین کنید.

حروف کامل $= 32$

حروف حذف شده 6 $= 26$

$32 * 9^5 = 1889568$

$26 * 9^5 = 1535274$

تمرین ۱۵) به چند طریق میتوان ۹ کتاب را در یک قفسه در کنار هم قرارداد بطوری که سه تای آنها همیشه پهلوی هم قرار گیرند؟

$1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ (7\ \ 8\ \ 9)$

با فرض یکسان بودن $= 7!$

با فرض یکسان نبودن $= 7! * 3!$

$$\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{7!}{9!}$$

$$\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{7! * 3!}{9!}$$

تمرین ۱۷) دوازده زن و ده مرد در یک محل زندگی میکنند که از بین انها سه زن و دو مرد با هم خواهر و برادر هستند. به چند طریق این عده میتوانند با هم ازدواج کنند در صورتی که هر مرد تنها با یک زن ازدواج کند؟

۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	زن

مرد	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲

$$12-3=9$$

$$10-2=8$$

۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴

$$S\begin{cases} \text{زن} = 12 & 3+9 = 12\ \text{زن} \\ & \rightarrow \\ \text{مرد} = 10 & 8\ \text{مرد} \end{cases}$$

۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$\text{خواهر و برادر}\begin{cases} \text{زن} = 3 & 2+8 = 10\ \text{مرد} \\ & \rightarrow \\ \text{مرد} = 2 & 9\ \text{زن} \end{cases}$$

$$\text{طریق} \rightarrow 12 * 10 = 120$$

$$\text{نمیتوان} \rightarrow \frac{2*3}{114} = \frac{6}{114} = 0.05263 \simeq 0.053$$

تمرین ۱۹) به چند طریق میتوان ۱۲ نفر را به کمیته های ۵ ، ۳ ، ۴ نفره تقسیم نمود؟

$$\begin{cases} S = 12 & \text{نفر} \\ 3.4.5 = \text{کمیته های} \end{cases}$$

$$\frac{12!}{3!\,4!\,5!} =$$

تمرین ۲۰) از یک گروه شامل ۹ مرد و ۳ زن میخواهیم یک کمیته ۴ نفره تشکیل دهیم:

الف) احتمال اینکه کمیته شامل فقط یک زن باشد را بیابید:

ب) احتمال اینکه کمیته شامل حداقل یک زن باشد را بیابید:

ج) احتمال اینکه کمیته شامل هم مرد و هم زن باشد را بیابید:

$$\begin{cases} \text{مرد } 9 \\ \text{زن } 3 \end{cases} \rightarrow \text{کمیته 4 نفره}$$

الف) $P\left(\text{یک زن در کمیته}\right) = \frac{\binom{3}{1}\binom{9}{3}}{\binom{12}{4}}$

ب) $P\left(\text{حداقل یک زن}\right) = \frac{\binom{3}{1}\binom{9}{3}}{\binom{12}{4}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{9}{2}}{\binom{12}{4}} + \frac{\binom{3}{3}\binom{9}{1}}{\binom{12}{4}} =$

$P\left(\text{اصلا زن نباشد}\right) = \frac{\binom{3}{0}\binom{9}{4}}{\binom{12}{4}} =$

ج) برابر ب

تمرین ۲۲) ده مهره غیر متمایز را به چند طریق میتوانید در چهار جعبه متمایز قرار دهید در صورتی که بخواهیم در هر جعبه لااقل یک مهره قرار گیرد؟

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \;\; . \;\; x_i \geq 0$$

$$\text{باتکرار} \rightarrow \binom{n+r-1}{r} = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6}$$

تمرین ۲۵) بیست اتومبیل در مسابقه ای شرکت میکنند. هشت مرسدس بنز، هفت پژو، وبقیه شورلت میباشند. هرگاه فقط کارخانه سازنده اتومبیل در نظر گرفته شود، مطلوب است:

الف) احتمال اینکه یکی از اتومبیل های مرسدس بنز مقام اول را بدست آورده بیابید.

ب) احتمال اینکه اتومبیل های مرسدس بنز مقام های اول و دوم را بدست اورند بیابید.

الف) $\frac{8}{20} = 0.4$

ب) $\frac{8}{20} * \frac{7}{19} = 0.4 * 0.36 = 0.144$

تمرین ۲۶) یک آسانسور از طبقه همکف با ۸ نفر حرکت میکند، بطوری که در طبقه ششم هیچ کس در آسانسور باقی نمی ماند. به چند طریق این افراد میتوانسته اند از آسانسور پیاده شوند؟ اگر افراد شامل ۵ مرد و ۳ زن بوده باشند، جواب چیست؟

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 8 \ . \ x_i \geq 0$

$\binom{6+8-1}{8} = \binom{13}{8}$

تمرین ۲۷) مهم) فروشگاهی ۵۰ دستگاه ضبط صورت را از تولیدکننده ای دریافت میکند. چهار دستگاه بطور تصادفی انتخاب شده و آزمایش میشوند. اگر هر چهار دستگاه سالم باشند فروشگاه محموله را قبول میکند و در غیراینصورت ۵۰ دستگاه را عودت میدهد. فرض کنید محموله حاوی ۵ دستگاه نقص دار است.

الف) احتمال اینکه فروشگاه محموله را بپذیرد بیابید.

ب) احتمال اینکه دو دستگاه آزمایش شده اول دارای نقص و دو دستگاه بعدی بدون نقص باشند را بیابید.

$$\begin{cases} \text{دستگاه} = 50 \\ \text{خراب} = 5(4) \\ x = \text{تعداد خراب ها} \\ X = 0.1.2.3.4.5 \end{cases}$$

الف) $f_{(x)} = \frac{\binom{5}{x}\binom{45}{4-x}}{\binom{50}{4}} = \frac{\binom{5}{3}\binom{45}{4-3}}{\binom{50}{4}} =$

ب) $\frac{5}{50} * \frac{4}{49} * \frac{45}{48} * \frac{44}{47} =$

تمرین ۳۲) شما به طرف هدفی آنقدر تیراندازی میکنید تا به هدف برخورد کند. فرض کنید که در هر تیراندازی احتمال اینکه شما به هدف بزنید ۰٫۹ است و تیراندازی ها از یکدیگر مستقل هستند. احتمال این را بدست آورید که:

الف) بیش از دو تیراندازی لازم باشد.

ب) تعداد تیراندازی های لازم مضربی از ۳ باشد.

S	1	2	3	4	5	6
P	(0.9)	$(0.1)^1(0.9)$	$(0.1)^2(0.9)$	$(0.1)^3(0.9)$	$(0.1)^4(0.9)$	$(0.1)^5(0.9)$

$$\frac{\text{جمله اول}}{1-\text{قدر مطلق}}$$

الف) $P\left(\text{الف}\right) = \frac{(0.1)^2 * (0.9)}{1-0.1} = (0.1)^2$

ب) $P\left(\text{ب}\right) = \frac{(0.2)^2 * (0.9)}{1-(0.1)^3} =$

تمرین ۳۷) از دانشجویان سال اول دانشکده ای، ۲۵% از درس ریاضی، ۱۵% از درس فیزیک و ۱۰% از هر دو درس ریاضی و فیزیک مردود شده اند. دانشجویی را به تصادف انتخاب میکنیم. مطلوب است:

الف) اگر از درس فیزیک مردود شده است، از درس ریاضی نیز مردود شده باشد.

ب) اگر از درس ریاضی مردود شده است، از درس فیزیک نیز مردود شده باشد.

$$A = 0.25 \;.\; B = 0.15 \;.\; C = 0.10$$

الف) $P\left(\text{از درس ریاضی رد شود} \,\middle|\, \text{از درس فیزیک رد شود}\right) = \dfrac{P\left(\text{از فیزیک و ریاضی رد شود}\right)}{P\left(\text{از فیزیک رد شود}\right)} \rightarrow P(A|B)$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{25}{100}} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

ب) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{10}{100}}{\frac{15}{100}} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$

$$\frac{\frac{15}{100}}{\frac{10}{100}} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

تمرین ۳۸) احتمال به صدا درامدن هریک از سه آژیر خطر مستقلی که در یک فروشگاه نصب شده اند به هنگام بروز آتش سوزی برابر ۰٫۹۵ است.

الف) احتمال اینکه هر سه آژیر خطر به هنگام آتش سوزی به صدا درآیند را بیابید.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) + P(B) + P(C) = (0.95) * (0.95) * (0.95)$$
$$= 0.857375 \simeq 0.86$$

ب) احتمال اینکه حداقل یکی از ۳ آژیر خطر بصدا درآید را بیابید.

$$P(A \cup B \cup C)$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C)$$
$$+ P(A \cap B \cap C) = (0.95)^3 - 3(0.95)^2 - (0.95)^3$$
$$= 0.86 - 2.7075 - 0.86 = -2.7075$$

تمرین ۴۶) شرکتی دارای دو کارخانه است که دوربین عکاسی تولید میکنند. ۲۰٪ تولیدات کارخانه $\mathcal{A}$ و ۵٪ تولیدات کارخانه $\mathcal{B}$ معیوب هستند.

تولیدات $\mathcal{A}$ در هفته دوبرابر تولیدات $\mathcal{B}$ است.

$$\begin{cases} A=\dfrac{2}{3}\begin{cases}\dfrac{80}{100}\text{ سالم}\\ \dfrac{20}{100}\text{ خراب}\end{cases}\\ B=\dfrac{1}{3}\begin{cases}\dfrac{95}{100}\text{ سالم}\\ \dfrac{5}{100}\text{ خراب}\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{matrix} W & B\text{اول} \\ 2W & A\text{اول}\end{matrix} \rightarrow \begin{cases}3W=1\\ W=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

الف) احتمال اینکه دوربینی که بطور تصادفی از میان دوربین های تولید شده انتخاب میشود، سالم باشد را بیابید.

$\%5+\%20=\%25$

$\%100-\%25=\%75$

$$P\left(\text{سالم باشد}\right)=\frac{2}{3}*\frac{80}{100}+\frac{1}{3}*\frac{95}{100}=\frac{255}{300}$$

ب) اگر دوربین انتخاب شده خراب باشد، احتمال اینکه از تولیدات کارخانه $\mathcal{A}$ باشد را بیابید.

$P(A)=\%66$

$P(B)=\%33$

$$\begin{cases}\%66\rightarrow A\begin{cases}P(M|A)\rightarrow\%20\\ \quad\quad\rightarrow\%80\end{cases}\\ \%33\rightarrow B\begin{cases}P(M|B)\rightarrow\%5\\ \quad\quad\rightarrow\%95\end{cases}\end{cases}$$

$$P(A|M)=\frac{\%66*\%20}{\%66*\%21+\%34*\%50}$$

$$P\left(\text{باشد } A \text{ از} \;\middle|\; \text{خراب}\right)=\frac{P(A.\text{خراب})}{P(\text{خراب})}=\frac{\frac{2}{3}*\frac{20}{100}}{\frac{45}{300}}$$

"فصل سوم"

متغیرها

گسسته: بین دو عدد ، عدد دیگری نیست

پیوسته: بین دو عدد میتواند n عدد باشد

متغیر تصادفی گسسته

مثال)۳٫۱٫۱) آزمایش پرتاب یک سکه ۳ مرتبه را در نظر بگیرید. فضای نمونه حاصل از این آزمایش عبارت است از:

$$S = \{TTT.TTH.THT.HTT.HHT.HTH.THH.HHH\}$$

x= تعداد شیرها در ۳ بار پرتاب سکه

$$X: S \to |R$$

H	3	2	2	2	1	1	1	0
S=	HHH	HHT	HTH	THH	TTH	THT	HTT	TTT
T	0	1	1	1	2	2	2	0
	3	1	1	1	-1	-1	-1	-3

نکته: جنس متغیر تصادفی تابع است

$$P(X.x) = F(x)$$

تابع احتمال اول مثبت باشد دوم جمع مقادیر یک باشد.

$$1. \forall x\ f(x) \geq 0$$

$$2. \sum_{x} f(x) = 1$$

$P(x=0) = \frac{P(A)}{P(S)} = \frac{1}{8}$

$P(x=1) = \frac{3}{8}$

$P(x=2) = \frac{3}{8}$

$P(x=3) = \frac{1}{8}$

X	0	1	2	3
$\mathfrak{F}(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$P(X<0) = 0$ 　　　 $P(X \leq 0) = f(0) = \frac{1}{8}$

$P(X \leq 1) = f(1) = \frac{3}{8}$

$P(X \leq 2) = f(2) = \frac{3}{8}$

$P(X \leq 3) = f(3) = 1$

$P(X < 10) = 1$

$P(X < -2) = 0$

$P(X > -2) = 1$

$F\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ 　　　 $P\left(X < \frac{3}{2}\right) = \frac{4}{8}$

$P(X<2) = P(X<1)$

$\leq$ یعنی F

$<$ یعنی f

تابع توزیع

۱. تابع احتمال (f) تابع توزیع (F)

احتمال (f) روی نقطه ، توزیع (F) احتمال تا نقطه

$F(x) = P(X \leq x)$

$$F(-\infty) = 0$$
$$F(+\infty) = 1$$
$$F\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{7}{8}$$
$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$$

$$F(x) = P(X \leq x) = 0\begin{cases} 0 & if \quad x < 0 \\ \frac{1}{8} & if \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8} & if \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & if \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & if \quad x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = F(x) - F(x')$$
$$P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x)$$

مثال)

$$f(1) = F(1) - F(1') \rightarrow F(1) - F(0) = \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

مثال) $(X = 0.1.3)\ .\ \ S = \{123.132.213.231.321.312\}$

X	0	1	3
F(x)	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$F(x)=\begin{cases}0 & if \quad x<0\\ \frac{2}{6} & if \quad 0\le x<1\\ \frac{5}{6} & if \quad 1\le x<3\\ 1 & if \quad 3\ge x\end{cases}$$

مثال) $y=1.2.3$. $x=0.1.2$. سالم $=3$. خراب $=2$

تعداد خراب $= X$

$$f(x)=\frac{\binom{2}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\,2!}=10}$$

X	0	1	3
F(X)	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$F(X)=\begin{cases}0 & if \quad x<0\\ \frac{1}{10} & if \quad 0\le x<1\\ \frac{7}{10} & if \quad 1\le x<2\\ 1 & if \quad x\ge 2\end{cases}$$

مثال)۳٫۲٫۲) تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f_Y(y)=k\left(\frac{1}{6}\right)^y \qquad y=0.1.2.\dots$$

الف) مقدار k را چنان تعیین کنید که $f_Y(y)$ تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته Y باشد.

$$1=\sum_{y=0}^{+\infty} f_Y(y)=\sum_{y=0}^{+\infty} k\left(\frac{1}{6}\right)^y=k[1+\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\cdots]=k\left[\frac{1}{1-\frac{1}{6}}\right]=k\left(\frac{6}{5}\right)$$

ب) احتمالات زیر را محاسبه کنید:

$$P\left(y \geq \frac{11}{3}\right) = \sum_{y=4}^{+\infty} f_Y(y) = \sum_{y=4}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^y = \frac{\frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^4}{1-\frac{1}{6}} = (\frac{1}{6})^4 = \frac{1}{1296}$$

$$P\left(y \leq \frac{5}{2}\right) = f_Y(0) + f_Y(1) + f_Y(2) = \frac{5}{6}\left[1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{36}\right] = \frac{5}{6} * \frac{43}{36} = \frac{215}{216}$$

متغیر پیوسته

تابع چگالی احتمال

۱. $\forall x \quad f(x) \geq 0$

۲. $\int_x f(x)dx = 1$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = P(a < x < b)$$

$$P(x = a) = \int_b^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

۱. انتگرال معین

$f(x) = 1 \quad 0 < x < 1$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 dx = (x)_0^1 = 1 - 0 = 1$$

۲. $f(x) = x \quad 0 < x < 1$

$$\int_0^1 xdx = \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

۳. $f(x) = x + 1$

$$\int_0^1 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)_0^1 = \left(\frac{1}{2} + 1\right) - 0 = \frac{3}{2}$$

مثال) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{if} \quad \text{سایر نقاط} \end{cases}$ با استفاده به بازه

$$\int_x f(x)dx = \int_0^1 2xdx = \left(\frac{3x^2}{2}\right)_0^1 = 1 - 0 = 1$$

مثال) $\left(\frac{1}{2} < x < 1\right)$ $\quad 0 < x < 1$ $\quad$ از $\infty-$ تا 0 برابر 0 است

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 2xdx = (x^2)_{\frac{1}{2}}^1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

مثال) $P\left(x > \frac{1}{2}\right)$

$$P\left(\frac{1}{2} < x < 1\right) 1 - P\left(x \le \frac{1}{2}\right) = 1 - \int_0^{\frac{1}{2}} 2xdx$$

$P(x \le 4) = 1$

$P(2 < x < 4) = 0$

$P(x < -4) = 0$

$P(X > 1) = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) = dt$

$$F(x) = P(x \le x) = \begin{cases} 0 & if \quad x < 0 \\ \int_0^x 2tdt = \left(2\frac{x^2}{2}\right)_0^x = x^2 & if \quad 0 < x < 1 \\ 1 & if \quad x \ge 1 \end{cases}$$

مثال) $P\left(\frac{1}{2} < x < 1\right)$

$$F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

مثال) ۳٫۳٫۲) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^2} & 1 < x < 10 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

قائده انتگرال گیری در یک x ضرب میشود

الف) مقدار c را تعیین کنید.

$$\int_1^{10} C\,x^2dx = 1\int_1^{10} x^2dx = \frac{x^{-1}}{-1} = \left(-\frac{1}{x}\right)_0^{10} = -\frac{1}{10}+1 = \frac{9}{10} \to \frac{1}{C} \to C = \frac{10}{9}$$

ب) تابع توزیع X را بدست آورید.

$$F(x) = P(x \le x) = \begin{cases} 0 & if \quad x<1 \\ \int_1^x \frac{10}{9^{x^2}}dt = \frac{10}{9}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = \frac{10}{9}\left[1-\frac{1}{x}\right] & if \quad 1<x<10 \\ 1 & if \quad x \ge 10 \end{cases}$$

ج) احتمالات زیر را محاسبه کنید.

$* \boldsymbol{P(1 < X \le 5)}$

$$\int_1^5 \frac{10}{9^{x^2}}dx = \frac{10}{9}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^5 = \frac{10}{9}\left[-\frac{1}{5}+1\right] = \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$$

$\boldsymbol{P(X > 2)}$

$$\int_2^{+\infty} f_x(x)dx = \int_2^{10} \frac{10}{9x^2}dx = \frac{-10}{9x}\Big|_2^{10} = \frac{-1}{9}+\frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

$\boldsymbol{P([X] = 3)}$

$$P(3 \le X < 4) = F_X(4) - F_X(3) = \frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{4}\right) - \frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{54}$$

مثال) تمرین ۱۴) مقدار C را چنان تعیین کنید که تابع های زیر یک تابع چگالی احتمال باشند و در هر حالت تابع توزیع مربوط را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} C(x+1) & -1<x<2 \\ 4C & 3<x<4 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$\left(C\frac{x^2}{2}+x\right)_{-1}^{3} = 8C \to \frac{9}{2}+3-\frac{1}{2}+1$$

$$4C(x)_{-3}^{4} = 4C$$

$$8C + 4C = 1 \to C = \frac{1}{12}$$

$$f(x) = P(x \leq x)$$

$$= \begin{cases} 0 & if \quad x < -1 \\ \frac{1}{12}\int_{-1}^{x}(t+1)dt = \frac{1}{12}\left[\frac{t^2}{2}+t\right]_{-1}^{x} = \frac{1}{12}\left[\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}+1\right] & if \ -1 < x < 3 \\ \frac{8}{12}\int_{3}^{x}\frac{4}{12}dt = \frac{8}{12}+\frac{4}{12}[t]_3^x = \frac{8}{12}+\frac{4}{12}[x-3] & if \quad 3 < x < 4 \\ 1 & if \quad x \geq 4 \end{cases}$$

مثال) $f(y) = \begin{cases} cy & 0 < y < 1 \\ c & 1 < y < 2 \\ c(y+3) & 2 < y < 3 \end{cases}$

$$C\left(\frac{y^2}{2}\right)_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}C$$

$$C(y)_1^2 = C$$

$$C\left(\frac{y^2}{2}+3y\right)_2^3 = 1$$

$$\frac{1}{2}C + C + \frac{11}{2}C \to C = \frac{1}{7}$$

$$f(x) = P(y \leq y) = \begin{cases} 0 & if \quad y < 0 \\ \frac{1}{7}+\int_0^y tdt = \frac{1}{7}\left(\frac{t^2}{2}\right)_0^y = \frac{y^2}{14} & if \ 0 < y < 1 \\ \frac{1}{14}+\int_1^y \frac{1}{7}dt = \frac{1}{14}+\frac{1}{7}(t)_1^y = \frac{1}{14}+\frac{1}{7}(y+1) & if \ 1 < y < 2 \\ \frac{3}{14}+\int_2^y \frac{1}{7}(t+3)dt = \frac{3}{14}+\frac{1}{7}\left[\frac{t^2}{2}+3t\right]_2^y & if \ 2 < y < 3 \\ \frac{3}{14}+\frac{1}{7}\left[\frac{y^2}{2}+3y-2-6\right] & if \quad y \geq 3 \end{cases}$$

مثال) $f(x) = \begin{cases} Cx & 0 < x < 3 \\ C(6-x) & 3 < x < 6 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} C\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^3 = \frac{9}{2}C \\ C\left(6x-\frac{x^2}{2}\right)_3^6 = \frac{9}{2}C \end{pmatrix} = \frac{9}{2}C + \frac{9}{2}C = 1 \rightarrow C = \frac{1}{9}$$

$$F(y) = P(y \le y)$$

$$= \begin{cases} 0 & if \quad x < 0 \\ \int_0^y \frac{1}{9}tdt = \frac{1}{9}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^y = \frac{y^2}{18} & if \quad 0 < y < 3 \\ \frac{1}{2}\int_3^y \frac{1}{9}(6-t)dt = \frac{1}{2}+\frac{1}{9}\left[6t-\frac{t^2}{2}\right]_3^y = \frac{1}{2}+\frac{1}{9}\left[6y-\frac{y^2}{2}-18+\frac{9}{2}\right] & if \quad 3 < y < 6 \\ 1 & if \quad y \ge 6 \end{cases}$$

مثال) ۴٫۳٫۲) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f(x) \begin{cases} Cx^2e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف) مقدار c را تعیین کنید.

$$\int_0^\infty x^2e^{-2x}dx = \frac{1}{C}$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-2x}dx = \left[-\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^\infty$$

$$e^u du = \frac{1}{u'} - e^u$$

$$0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{C} \rightarrow C = 4$$

ب) تابع توزیع X را بدست آورید و $P(X > 5)$ را محاسبه کنید.

$$F_X(X) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$$

$$= \int_0^x 4t^2e^{-2t}dt = 4\left[-\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right]e^{2t}\Big|_0^x = 1 - (2x^2 + 2x + 1)e^{-2x}$$

$$F_X(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-(2x^2+2x+1)e^{-2x} & x \ge 0 \end{cases}$$

$$P(X > 5) = 1 - P(X \le 5) = 1 - F_X(5) = 61e^{-10} = 0.003$$

+	x^2	e^{-2x}
-	$2x$	$-\frac{1}{2}e^{-2x}$
+	2	$-\frac{1}{4}e^{-2x}$
-	0	$-\frac{1}{8}e^{-2x}$

"فصل چهارم"

امید ریاضی

$$E(X)=\begin{cases}\sum_x X\,f(x) & \text{گسسته}\\ \int x\,f(x)dx & \text{پیوسته}\end{cases}$$

$$E[h(X)]=\begin{cases}\sum_x h(x)f(x) & \text{گسسته}\\ \int_x h(x)f(x)dx & \text{پیوسته}\end{cases}$$

مثال) تمرین ۱) فرض کنید متغیر تصدفی x دارای تابع احتمال زیر باشد:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & x=2.4.8.16\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$Var(X).E(3^x).E\left(\frac{1}{x}\right).E(x)$$

مطلوب است محاسبه:

x	2	4	8	16
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$xf(x)$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$(x+1)f(x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{17}{4}$
$X^2f(x)$	1	4	16	64

نکته: اگر عددی در عدد ثابت ضرب شود، حاصل مجزور آن عدد است

$\frac{1}{x}f(x)$	$\frac{1}{2}*\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}*\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}*\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}*\frac{1}{4}$
$E(x^2)$	$\frac{2^2}{4}$	$\frac{2^4}{4}$	$\frac{2^8}{4}$	$\frac{2^{16}}{4}$

نکته: اگر عددی در عدد ثابت جمع یا کم شود در جواب حساب نمیشود.

$$E(x) = 7.5$$

$$E(x+1) = E(X) + E(1) = 7.5 + 1 = 8.5$$

$$E(x^2) = 1 + 4 + 16 + 64 = 85$$

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{15}{64}$$

$$E(2X+2) = 2E(X) = 2 * 7.5 + 2 = 17$$

$$E(X^2) = 85 \rightarrow Var(X) = 85 - 56.25 = 28.75$$

$$Var(X) = E(X^2)E^2(X)$$

$$E(x^2) = 85 \qquad E^2(x) = 7.5 * 7.5 = 56.25$$

$$Var(2x+1) = 4Var(x) = 4 * 28.75 = 115$$

$$Var(3x+1) = 9Var(X) = 9 * 28.75 = 258.75$$

$$E(3x^2) = 3 * 85 = 255$$

مثال) ۳ تکنسین و ۵ مهندس، امید ریاضی تعداد مهندسین

X= تعداد مهندسین بین ۴ نفر

X=0.1.2.3

$$f(x) = \frac{\binom{5}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8*7*6!}{3!} = 56}$$

X	0	1	2	3	

$f(x)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$	
$xf(x)$	0	$\frac{15}{56}$	$\frac{60}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{105}{56} = 1.9$
$x^2f(x)$	0	$\frac{15}{56}$	$\frac{120}{56}$	$\frac{90}{56}$	$E(x^2) = \frac{255}{56} = 4.01$

$$Var(x) = 4.01 - (1.9)^2 = 4.01 - 3.61 = 0.4$$

$$E(x+2) = 1.9 + 2 = 3.9$$

$$Var(2x) = 4 * 0.4 = 1.6$$

مثال) تمرین ۴) شخصی میخواهد اتومبیل خود را به مبلغ ۱۰۰۰۰ تومان بیمه کند، شرکت بیمه تخمین میزند که کل مبلغ با احتمال ۰٫۰۰۲ و نصف آن با احتمال ۰٫۰۱ و ۲۵% آن با احتمال ۰٫۱ باید بپردازد. شرکت بیمه چه حق بیمه ای باید، در نظر بگیرد تا سود معادل ۱۰۰ تومان داشته باشد؟

X	10000	5000	2500	
$f(x)$	0.002	0.01	0.1	
$Xf(x)$	20	50	250	$E(X) = 320$

هزینه بیمه $= 320 + 100 = 420$

نکته: تابع احتمال برابر گسسته و تابع چگالی برابر پیوسته است.

مثال) اگر تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X بصورت زیر باشد:

$$f_x(X) = \begin{cases} k(2-x) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار k را تعیین کنید و $E(X)$ و $Var(X)$ را محاسبه کنید.

$$k\int_0^2 (2-x)dx = 1 \quad k\left[2x-\frac{x^2}{2}\right] = 1 \quad 2k = 1 \to k = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = \frac{1}{2}\int_0^2 (2x-x^2)dx \to \frac{1}{2}\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[4-\frac{8}{3}\right] = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x^2-x^3)dx \to \frac{1}{2}\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{16}{3}-\frac{16}{4}\right] = \frac{2}{3}$$

$$Var(X) = \frac{2}{3} * \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & if & x \le 1 \\ k(x^2-1)\ if\ \ 1 < x < 4 \to k(x^2-1) = (16-1) \to 15k-1 \to k = \frac{1}{15} \\ 1 & if & x \ge 4 \end{cases}$$

$F(X) = F(X) - F(X')$

مثال) $F'(X) = f(X) = 2kx \quad 1 < x < 4$

$$2k\int_1^2 (x)dx = 1 \quad 2k\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = 1 \to k[x^2]_1^4 = 1 \to k[16-1] \to 15k$$
$$= 1 \to k = \frac{1}{15}$$

$$E(X) = \frac{2}{15}\int_1^4 x^2dx = \frac{2}{15}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \frac{2}{15}[21] = \frac{42}{15} = \frac{14}{5} = 2.8$$

$$E(X^2) = \frac{2}{15}\int_1^4 x^3dx = \frac{2}{15}\left[\frac{x^4}{4}\right] = \frac{2}{15} * \frac{256}{4} = \frac{256}{30} \to \frac{51}{6} = 8.5$$

$$Var(X) = 8.5 - (8.5)^2 = 8.5 - 72.25 = -63.75$$

مثال) تمرین ۵) اگر متغیر تصادفی X دارای میانگین $\frac{1}{3}$ و تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_x(X) = \begin{cases} ax+b & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقادیر a و b و $Var(X)$ را محاسبه کنید.

$$E(X) = \frac{1}{3}$$

$$\begin{pmatrix} \int_0^1 (ax+b)dx = 1 \xrightarrow{\text{انتگرال}} \left(a\frac{x^2}{2} + bx\right)_0^1 = 1 \\ E(X) = \int_0^1 (ax^2+bx)dx = 1 \to \left(a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2}\right)_0^1 = \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a}{2} + b = 1 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{a}{2} - \frac{2-a}{3} = 1 - \frac{2}{3} \to a = -2 \quad b = 2$$

$$f(x) = (-2x+2) \qquad 0 < x < 1$$

$$E(x^2) = \int_0^1 (-3x^3 - 2x^2)dx = \left(\frac{-4x^4}{4} + \frac{7x^3}{3}\right)_0^1 = -\frac{2}{4} + \frac{2}{3} = \frac{-6+8}{12}$$

$$= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$Var(X) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

"فصل پنجم"

توزیع های آماری

۱. توزیع برنولی

هر آزمایشی دو جواب دارد

$X \sim b(1 * p)$

X: تعداد موفقیت ها در یک بار آزمایش

P: احتمال موفقیت

$q: 1-P=$ احتمال شکست

$X=0,1$

$f(x) = p^x q^{1-x}$
$x = 0.1$
$Var(x)P - P^2 = P(1-P) = pq \begin{cases} E(x) = P \\ E(x)^2 = P \end{cases}$

X	0	1
$f(X)$	$1-P$	P
$X\,f(X)$	0	P
$X^2\,f(X)$	0	P

مثال)

$$\boldsymbol{p} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} \qquad q = \frac{5}{6} \qquad E(X) = \frac{1}{6} \qquad Var(X) = \frac{5}{36}$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \qquad q = \frac{3}{4} \qquad E(X) = \frac{1}{4} \qquad Var(X) = \frac{3}{16}$$

۲. توزیع دوجمله ای

هر آزمایش برنولی که تکرار شود توزیع دوجمله ای است.

$X \sim B(n.p)$

x: تعداد موفقیت ها در n بار آزمایش

p: احتمال موفقیت

q: احتمال شکست

$$f(X) = \binom{X}{n} p^x q^{n-x}$$

$$x = 0.1.2.\dots.n$$

$$E(X) = np$$

$$Var(X) = npq$$

مثال) ۲۰ تست ۴ جوابی

$$p = \left(\frac{1}{4}\right) \qquad X = \left(\frac{3}{4}\right) \qquad n = 20 \qquad f(X) = \binom{20}{X}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{20-X}$$

$p(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2)$ حداکثر دو جواب درست

$p(X = 2) = f(2) = \binom{20}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{18}$ دقیقا دو جواب درست

$p(X \geq 2) = 1 - [f(0) + f(1)]$ حداقل دو جواب درست

$$E(X) = 20 - \frac{1}{4} = 5$$

$$Var(X) = 20 * \frac{1}{4} * \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

اگر احتمال جوابهای غلط را بخواهد جای p و q عوض میشود.

۳. توزیع فوق هندسی

میتواند فوق هندسی باشد یا از طریق دوجمله ای حل شود.

$X \sim HG(N.M.n)$

N: تعداد کل اعضاء جامعه

M: تعداد اعضائی که در جامعه صفت دارند

n: تعداد اعضاء نمونه

X: تعداد اعضائی که در نمونه صفا دارند

$$f(X) = \frac{\binom{M}{X}\binom{N-M}{n-X}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = n * \frac{M}{N}$$

$$Var(X) = n * \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

مثال) ۵٫۴٫۲) در انتخاب ۵ قطعه از بین ۴۰ قطعه که ۳ تای آنها خراب است احتمال این را پیدا کنید که حداکثر یک قطعه انتخاب شده خراب باشد.

X: تعداد خرابهایی از ۵ نمونه

$\mathcal{N}$:۴۰

$\mathcal{M}$:۳

n :۵

$x = 0.1.2.3$

$$E(X) = \frac{nM}{N} \quad . \quad Var(X) = \frac{nM}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{n-1}\right)$$

$$P(X \le 1) = f_X(0) + f_X(1) = \frac{\binom{3}{0}\binom{37}{5}}{\binom{40}{5}} + \frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}} = 0.9635$$

نکته: اگر $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ اعداد بزرگی باشند، آنگاه

$$if \quad N.M \to p = \frac{M}{N}$$

اگر توزیع فوق هندسی باشد $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ عداد بزرگی بود باروش دوجمله ای محاسبه میشود.

مثال) ۵٫۴٫۳) در یک منطقه ۴۰۰۰ از ۱۰۰۰۰ رای دهنده با مالیات فروش مخالف میباشند. اگر ۱۵ نفر از افرادی که میتوانند رأی دهند بطور تصادفی انتخاب شوند و از آنها در مورد عقیده شان سول شود، احتمال اینکه اکثر ۷ نفر از آنها موافق مالیات فروش باشند را بیابید.

$\mathcal{N}$=۱۰۰۰۰

مخالف $\mathcal{M}$=۴۰۰۰

موافق $\mathcal{M}$=۶۰۰۰

$\mathcal{N}$=۱۵

x=0,1,2,...,15

$$p = \frac{M}{N} = \frac{6000}{10000} = \frac{6}{10} = 0.6 \qquad q = 0.4$$

$$f(X) = \binom{15}{X}(0.6)^2(0.4)^{15-X}$$

$$p(X \le 7) \approx \sum_{x=0}^{7}\binom{15}{x}(0.6)^x(0.4)^{15-x} = 0.2131$$

مثال) تمرین ۱) دانشگاهی n دانشجو دارد که ۷۰٪ آنها به سوالهای یک امتحان هوش در کمتر از ۲۵ دقیقه جواب میدهند. احتمال اینکه حداکثر ۲ نفر از ۱۲ دانشجویی که به تصادف انتخاب کرده این، طی مدت ۲۵ دقیقه امتحان را به پایان نرسانند را بیابید.

دوجمله ای

q=0.7 کمتر از ۲۵ دقیقه

p=0.3 بیشترین

n=12

x=0,1,2,...,12

$$f(X) = \binom{12}{X}(0.3)^X(0.7)^{12-X}$$

$P = 0.7$

$n = 12$

$x = 2$

$$P(X \le 2) = f_X(0) + f_X(1) + f_X(2)$$
$$= \binom{12}{0}(0.3)^0(0.7)^{12} + \binom{12}{1}(0.3)^1(0.7)^{11} + \binom{12}{2}(0.3)^2(0.7)^{10}$$
$$= 0.0000005 + 0.0000148 + 0.0001909 = 0.0001062$$

۴. توزیع پواسون

نشانه میانگین و محدوده زمانی

λ با توجه به زمان تغییر میکند

$X \sim \rho(\lambda)$

λ: بازه زمانی

$x = 0.1.2. \dots$

$$f(X) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!}$$

$$E(X) = Var(X) = \lambda$$

مثال(۱/۵/۵) یک دستگاه چاپگر کامپیوتری به طور متوسط در هر ماه ۲ بار سرویس میشود.

الف) احتمال اینکه در یک ماه کمتر از ۲ بار سرویس شود را بیابید.

ب) احتمال اینکه در سه ماه این چاپگر حداقل ۲ بار سرویس شود را بیابید.

$\lambda =$ ماه $=$ بازه زمانی $\quad \lambda = 2 \rightarrow f(X) = \frac{e^{-2}2^{X}}{X!} \quad x = 0.1.2. \dots$

الف) $p(x < 2) = f_x(0) + f_x(1) = \frac{e^{-2}2^{0}}{0!} + \frac{e^{-2}2^{1}}{1!} = 0 + 0.406 = 0.406$

ب) $\lambda =$ ماه $= 6 \Rightarrow \lambda = 6 \rightarrow f(y) = \frac{e^{-6}6^{y}}{y!} \quad y = 0.1.2. \dots$

$$p(y \geq 2) = 1 - p(y - 2) = 1 - \left[f_y(0) + f_y(1)\right] = 1 - \left[\frac{e^{-6}6^{0}}{0!} + \frac{e^{-6}6^{1}}{1!}\right] = 0 + 0.9826 = 0.9826$$

نکته: اگر در توزیع دو جمله ای $n \uparrow$ عدد بزرگی و $p \downarrow$ عدد کوچکی باشد آنگاه توزیع پواسون جایگزین توزیع دوجمله ای میشود. $\lambda = np$

مثال)۳٫۵٫۵) اطلاعات یک شرکت بیمه نشان میدهد که ۰٫۰۰۱ جامعه در هر سال از نوع معینی تصادف میمیرند. احتمال اینکه این شرکت مجبور باشد برای بیشتر از ۱۵ نفر از ۱۰۰۰۰ بیمه گزار شرکتش در مقابل خطرات چنین تصادف هایی در سال مفروض غرامت را بپردازد را بیابید.

$$n = 10000$$

$$p = 0.001$$

$$\lambda = np \rightarrow 10000 * 0.001 = 10 \rightarrow f(X) = \frac{e^{-10}10^X}{X!}$$

$$p(x \le 15) = f_x(0) + f_x(1) + \cdots + f_x(15) = 1 - 0.9513 = 0.0487$$

۵. توزیع هندسی

فضای نمونه گسسته قابل شمارش

$X \sim G(p)$

X: تعداد آزمایش ها تا رسیدن به اولین موفقیت

p: احتمال موفقیت

q: احتمال شکست

$$f(X) = p^1 q^{x-1} \qquad x = 1.2.3. \dots$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \rightarrow E(X) = \frac{q}{p^2}$$

مثال) ۱٫۷٫۵) فرض کنید احتمال قبولی یک نفر در امتحان رانندگی ۰٫۷ باشد. احتمال اینکه این شخص در امتحان رانندگی (الف) در مرتبه سوم، (ب) حداکثر در سوین بار قبول شود را بیابید.

$$E(X) = \frac{1}{P} \ . \ Var(X) = \frac{q}{p^2} \ . \ P(X \le r) = 1 - q^2$$

$p = 0.7 \qquad q = 0.3$

$f(X) = 0.7 * (0.3)^{X-1} \qquad x = 1.2. \ldots$

الف) $p(x = 3) = f_X(3) = (0.7)(0.3)^{3-1=2} = 0.063$

ب) $P(X \le 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - \sum_{x=4}^{+\infty}(0.7)(0.3)^{x-1} = 1 - \frac{(0.7)(0.3)^3}{1-0.3} =$

$1 - (0.3)^3 = 0.973$

۶. مهم . توزیع نمائی

فاصله زمانی بین اتفاقات توزیع پواسون است

$X \sim E(\theta)$

$$f(X) = \frac{1}{\theta} e^{\frac{-X}{\theta}} \qquad X > 0 \ . \ \theta > 0$$

$E(X) = \theta$

$Var(X) = \theta^2$

مثال) ۵٫۱۰٫۲) طول عمر هر دستگاه کامپیوتر دارای توزیع نمایی با میانگین ۱۷۰۰ ساعت میباشد. اگر آزمایشگاهی ۲۰ دستگاه کامپیوتر داشته باشد، احتمال اینکه حداقل دو دستگاه از آنها قبل از ۱۷۰۰ ساعت خراب شوند را بیابید.

$$\theta = 1700 \rightarrow f(X) = \frac{1}{1700} e^{\frac{-X}{\theta}} \qquad X > 0$$

$n = 20$

احتمال خراب شدن $p = p(x < 1700) = \int_0^{1700} \frac{1}{1700} e^{\frac{-X}{1700}} dx = 0.6321$

$q = 0.37$

$$f(y) = \binom{20}{y} 0.6321^y (0.3679)^{20-y} \qquad y = 0.1.2. \ldots .20$$

$$p(y \ge 2) = 1 - p(y < 2) = 1 - [f_y(0) + f_y(1)]$$
$$= 1 - \left[\binom{20}{0} (0.6321)^0 (0.3679)^{19}\right] = 0.9999$$

نکته: اگر X دارای توزیع پواسون باشد آنگاه

$$if \quad X \sim f(\lambda) \to f(X) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^X}{X!} \to y \to E\left(\frac{1}{\lambda}\right) \to f(y) = \lambda e^{-\lambda y}$$

مثال) ۵٫۱۰٫۳) بطور موسط تعداد ۵ تلفن در یک ساعت به تلفن خانه یک شرکت زده میشود.

الف) احتمال اینکه در یک ساعت حداقل ۲ تلفن زده شود را بیابید.

ب) احتمال اینکه تلفن بعدی لااقل بعد از ۱۵ دقیقه زده شود را بیابید.

ج) احتمال اینکه تلفن بعدی قبل از ۱۰ دقیقه زده شود را بیابید.

زمان = ساعت $\quad \lambda = 5 \to f(X) = \frac{e^{-5}5^X}{X!}$

$y \to E\left(\frac{1}{5}\right) \qquad f(y) = 5e^{-5y}$

الف) $p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1) = 1 - \left[\frac{e^{-5}5^0}{0!} + \frac{e^{-5}5^1}{1!}\right] = 1 - 0 + 0.0404$

$= 0.9596$

ب) $p\left(y > \frac{15}{60}\right) = p\left(y > \frac{1}{4}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} 5e^{-5y}\,dy = 5\left[-\frac{1}{5}e^{-5y}\right]_{\frac{1}{4}}^{\infty} = 0.2865$

$$\int e^u du = \frac{1}{u'}e^u$$

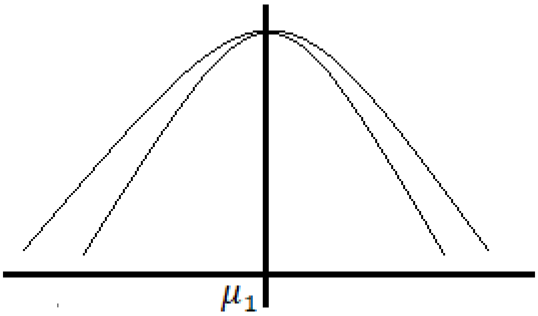
ج) $p\left(y < \frac{10}{60}\right) = p\left(y < \frac{1}{6}\right) = \int_0^{\frac{1}{6}} 5e^{-5y}\,dy = 5\left[-\frac{1}{5}e^{-5y}\right]_0^{\frac{1}{6}} = 0.5654$

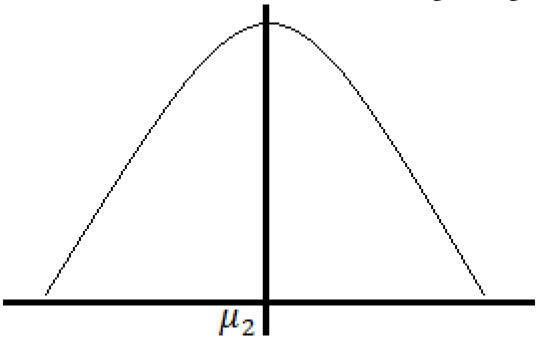
۷. (مهم . مهم . مهم . ۱۰۰٪ امتحانی) توزیع نرمال

$X \sim N(\mu . \sigma^Z)$

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^Z}{2\sigma^Z}}$

$$-\infty < x < +\infty$$
$$-\infty < \mu < +\infty$$
$$\sigma^Z > 0$$





$$P(a < x < b) = \int_a^b \frac{1}{\mathfrak{S}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\mathfrak{S}^Z}} dx \rightarrow N(0.1)$$ قابل حل نیست

نرمال استاندارد

$$P(Z \leq 0) = \frac{1}{2} = P(Z \geq 0) = P(0 < Z < 3.4) = P(-3.4 < Z < 0)$$

$$P(Z \leq 4) = 1$$

$$P(Z \leq -4) = 0$$

جدول صفحه ۳۷۰

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0009	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143

-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	030853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.5691	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	08621

1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

مثال)

Z	0.0	…	0.1	…	0.06	…	0.09
-3.4							
-3.3							
…							
-1							

$$P(Z \leq 1.96) = 0.975$$

…			
0			
…			
1			
…			
1.9		0.975	
…			
3.3			
…			
3.4			

مثال)

$$1 = \begin{cases} P(Z \leq 1) = 0.8413 \\ P(Z \leq -1) = 0.1587 \end{cases}$$

مثال) ۵٫۱۱٫۳) یک کارگاه تولید لوله، لوله هایی را تولید میکند که طول این لوله ها دارای توزیع نرمال با میانگین ۸ و انحراف معیار ۰٫۵ متر میباشد. مطلوب است:

الف) چند درصد لوله ها دارای طولی بین ۷٫۵ تا ۹ متر هستند ؟

ب) اگر در یک روز این کارگاه ۲۰۰ لوله تولید کند، چه تعداد از این لوله ها طولی بیش از ۹٫۲ متر دارند ؟

ج) ۹۷٫۵% از لوله های تولید شده در این کارگاه طولشان از چه مقدار کمتر است ؟

د) اگر در یک روز بدانیم که طول لوله های تولید شده در این کارگاه حداقل ۷٫۸ متر بوده است، چند درصد لوله های تولید شده در این روز طولی کمتر از ۸٫۴ متر دارند؟

ه) اگر ۵ لوله را یک به یک و با جایگذاری انتخاب کرده و اندازه گیری کنیم احتمال آنکه حداکثر یک عدد از آنها دارای طولی بیش از ۹ متر باشد را بیابید؟

$$X \backsim (8.5^2) \rightarrow Z = \frac{x-8}{0.5} \rightarrow N(0.1)$$

$X \rightarrow$ طول لوله

الف)

$$P(7.5 < x < 9): P\left(\frac{7.5-8}{0.5} < \frac{x-8}{0.5} < \frac{9-8}{0.5}\right) = P(-1 < Z < 2)$$
$$P(Z \le 2) - P(Z \le -1) = \Phi(2) - \Phi(-1) = 0.9772 - 0.1587 = 0.8187 \cong 0.82\ \%$$

ب)

$$P(X > 9.2) = P\left(\frac{X-8}{0.5} > \frac{9.2-8}{0.5}\right) = P(Z \ge 2.4) = 1 - P(Z \le 2.4) = 1 - 0.9918$$
$$= 0.0082$$

$$200 * \frac{82}{10000} = 1.64$$

ج)

$$P(X < a) = 0.975$$
$$P\left(\frac{X-8}{0.5} < \frac{a-8}{0.5}\right) = 0.975\ P\left(Z \le \frac{a-8}{0.5}\right) = 0.975$$
$$\frac{a-8}{0.5} = 1.96 \rightarrow a = 8 + 0.98 = 8.98$$

د)

$$P(X<8.4\,|X>7.8)=\frac{P(7.8<x<8.4)}{P(x>7.8)}=\frac{P\left(\frac{7.8-8}{0.5}<Z<\frac{8.4-8}{0.5}\right)}{P\left(Z>\frac{7.8-8}{0.5}\right)}$$

$$=\frac{P(-4<Z<8)}{1-P(Z\le -0.4)}=\frac{P(Z\le 0.8)-P(\le 0.4)}{1-P(Z\le 0.4)}\rightarrow\frac{P(7.8\le X<8.4)}{P(X\ge 7.8)}$$

$$=\frac{P(-0.4\le Z<0.8)}{P(Z\ge -0.4)}=\frac{\Phi(0.8)-\Phi(-0.4)}{1-\Phi(-0.4)}=\frac{0.7881-0.3446}{1-0.3446}=0.6767$$

ه)

$$P(Z\le 0.8)=\emptyset(0.8)$$

$$\text{توزیع دو جمله ای}\; P=P(X>9)=P\left(\frac{x-8}{0.5}>\frac{9-8}{0.5}\right)$$

$$p=P(X>9)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{9-8}{0.5}\right)=P(Z>2)=1-P(Z\le 2)=1-0.9772=0.0228$$

$$P(Y\le 1)=f_Y(0)+f_Y(1)=\binom{5}{0}(0.0228)^0(0.9772)^5+\binom{5}{1}(0.0228)^1(0.9772)^4=0.995$$

مثال) تمرین ۳۸) یک ماشین سازنده نوشانه نوشانه طوری ساخته شده است که در هر لیوان به طور متوسط ۲۰۷ میلی لیتر نوشابه میریزد. اگر مقدار نوشابه ریخته شده توط دستگاه دارای توزیع نرمال با انحراف معیار ۱۵ میلی لیتر باشد.

الف) چند درصد لیوان ها شامل بیش از ۲۳۱ میلی لیتر نوشابه هستند؟

ب) احتمال اینکه یک لیوان شامل ۱۹۸ تا ۲۱۶ میلی لیتر نوشابه باشد را بیابید.

ج) چند عدد از لیوان ها لب ریز خواهند شد اگر لیوان های ۲۳۷ میلی لیتری را برای ۱۰۰۰ نوشابه بعدی بکار ببریم؟

د) ۲۵% از لیوان ها پایین تر از چه مقداری از نوشابه را خواهند داشت؟

$$\text{جمع}=207\quad .\quad \sigma=15$$

$$X \to N(207.15^2) \to Z = \frac{x-207}{15} \to N(0.1)$$

الف)

$$P(X > 231) = 1 - P(X < 231) = 1 - P\left(Z < \frac{231-207}{15}\right)$$
$$= P(Z \geq 1.6) = 1 - P(Z \leq 1.6) = 1 - 0.1452 = 0.0548$$

ب)

$$P(198 < x < 216) = P\left(\frac{198-207}{15} < X < \frac{216-207}{15}\right) = P(-0.6 < Z < 0.6)$$
$$= P(Z < 0.6) - P(Z < -0.6) = 0.7256 - 0.2743 = 0.4513$$

ج)

$$P(X > 237) = P(236.5 < Z < 237.5) = P\left(\frac{236.5-207}{15} < Z < \frac{237.5-2.7}{15}\right)$$
$$= P(1.96 < Z < 2.03) = P(Z < 237.5) - P(Z < 1.96) = 0.9788 - 0.9750$$
$$= 0.0038$$

$$0.0038 * 1000 = 3.8 \cong 4$$

د)

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{25}{100} \to P\left(\frac{X-207}{15}\right) = 0.25 \cong \frac{X-2.7}{15} = -0.67$$
$$X = 196.95$$

مثال) تمرین ۱۴) فرض کنید که یک نفر به طور متوسط ۵ بار در سال مبتلا به سرماخوردگی میشود. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه او در سال آینده: (توزیع پواسون)

الف) چهار بار مبتلا به سرماخوردگی شود؟

ب) حداقل چهار بار مبتلا به سرماخوردگی شود ؟

ج) حداکثر چهار بار مبتلا به سرماخوردگی شود ؟

$\lambda = 5$. زمان = سال

$$F(X) = \frac{e^{-5}5^{x}}{x!} \quad . \quad x = 0.1.2. \ldots$$

الف) $P(X = 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 3) = 0.4405 - 0.3650 = 0.1755$

ب) $P(X \geq 40 = 1 - P(X < 4) = 1 - (X < 3) = 1 - 0.2650 = 0.735$

ج) $P(X \leq 4) = 0.4405$

مثال) تمرین ۱۵) تعداد اتومبیل هایی که برای زدن بنزین سوپر به پمپ بنزین معینی مراجعه میکنند کاملا تصادفی بوده و بطور متوسط ۲۴ اتومبیل در ساعت است. اگر برق به مدت ۱۰ دقیقه قطع گردد، احتمال اینکه این پمپ بنزین حداقل ۲ مشتری را در این فاصله از دست بدهد بیابید. (توزیع پواسون)

$N = 24 \; . \; \mu =? \; . \;$ ساعت $= 1 \; . \; \frac{1}{6} \rightarrow 0.16 \rightarrow \mu = 4$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.0916 = 0.9084$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \left(\frac{e^{-4}4^{0}}{0!} + \frac{e^{-4}4^{1}}{1!}\right) = 1 - 5e^{-4}$$

مثال) تمرین ۱۶) مشتریان یک کتاب فروشی بطور متوسط ۶ نفر در ساعت مراجعه میکنند. اگر مغازه در ساعت ۹:۳۰ دقیقه صبح باز شود، احتمال اینکه تا ساعت ۱۰ صبح دقیقا یک نفر و تا ظهر ۱۰ نفر مراجعه کنند را بیابید.

از ساعت 9 تا 10 = $\lambda = 3$. ↔ تا ظهر → $\lambda = 15$

$$P(X=1)=\frac{e^{-3}3^{10}}{1!}=3e^{-3}$$

$$P(X=1)=P(X\leq 1)-P(X\leq 0)=0.1991-0.0498=0.1493$$

$$P(X=10)=\frac{e^{-15}(15)^{10}}{10!}=0.04815$$

$$P(X=10)=P(X\leq 10)-P(X\leq 9)=0.1185-0.0699=0.0486$$